

Вариант 1

19.1

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может: убрать из кучи два камня, или убрать из кучи пять камней, или уменьшить количество камней в куче в три раза (количество камней, полученное при делении, округляется до меньшего).

Например, из кучи в 20 камней за один ход можно получить кучу из 18, 15 или 6 камней.

Игра завершается, когда количество камней в куче становится не более 31. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 31 или меньше камней. В начальный момент в куче было S камней, $S \geq 32$.

Будем говорить, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника.

Укажите минимальное значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

20.1

Для игры, описанной в задании 19, найдите два **наименьших** значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

21.1

Для игры, описанной в задании 19, найдите минимальное значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

19.2

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень либо увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать $(10, 7)$. Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: $(11, 7)$, $(20, 7)$, $(10, 8)$, $(10, 14)$. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда произведение количеств камней в кучах становится не менее 144. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший такую позицию, что произведение количеств камней в кучах будет 144 или больше.

В начальный момент в первой куче был один камень, во второй куче — S камней; $1 \leq S \leq 142$.

Будем говорить, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т. е. не являющиеся выигрышными независимо от дальнейшей игры противника.

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S , когда такая ситуация возможна.

20.2

Для игры, описанной в задании 19, найдите два наименьших значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

21.2

Для игры, описанной в задании 19, найдите минимальное значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

19.3

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня либо увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать $(10, 7)$. Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: $(12, 7)$, $(20, 7)$, $(10, 9)$, $(10, 14)$. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 118. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 118 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было три камня, во второй куче — S камней; $1 \leq S \leq 113$.

Будем говорить, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т. е. не являющиеся выигрышными независимо от дальнейшей игры противника.

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S , когда такая ситуация возможна.

20.3

Для игры, описанной в задании 19, найдите два наименьших значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

21.3

Для игры, описанной в задании 19, найдите минимальное значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.